Im Leben

$$
\begin{aligned}
1, 2, 3, \ldots &\in \mathbb{N} \\
0, 1, 2, 3, \ldots &\in \mathbb{N}_0 \\
\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots &\in \mathbb{Z} \\
\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{13}, 0.333333\ldots, 0.\overline{3} &\in \mathbb{Q} \\
\pi, e &\in \mathbb{R} \\
3.12 - 4.2i, \cos x + i \sin x, e^{i\pi x} &\in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

Im Rechner

Integer: 32 Bit, $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$ (Milliarden)

Double: IEEE 754, 64 bit, Exponent 11 bit, Mantisse (1+) 52 bit, $\approx$ 17 Dezimalen, $eps = 1.1102e - 16$

gegeben: $a \in \boldsymbol{R}^+$

gesucht: $x \in \boldsymbol{R}^+$ mit $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$

Start: $x_0 \in \boldsymbol{R}^+$

Iteration[1]: $x_{n+1} = x_n - (2x_n)^{-1}({x_n}^2 - a)$

---

[1] Newton-Methode zu $f(x) = x^2 - a$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = x^\star$$

mit

$$x^\star = \sqrt{a}$$

a) Fixpunkt: $x^\star = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{a}{x^\star}) = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{x^\star x^\star}{x^\star}) = x^\star$

b) Beschränkt (nach unten): $(x_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$
$x_n{}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a \geq 0 \qquad \frac{x_n{}^2+a}{2x_n} \geq \sqrt{a} \qquad x_{n+1} \geq \sqrt{a}$

c) Monoton fallend: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \leq \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{\sqrt{a}})$
$= \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$

Wie schnell?

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2x_n}\left({x_n}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a\right) \\
&= \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2
\end{aligned}
$$

also

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2$$

Quadratische Konvergenz

Flug (x) + 1 Woche Hotel (y): 800 €(8)
Flug (x) + 2 Wochen Hotel (2y) : 1300 €(13)

$$
\begin{aligned}
x + y &= 8 \\
x + 2y &= 13
\end{aligned}
$$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Dreiecksgestalt, Gauß-Methode

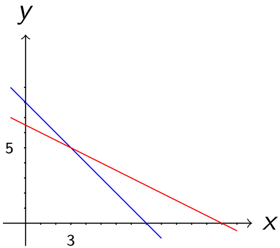
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 13 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 \searrow & 1 \searrow & 8 \searrow \\ 1 + (-1) \cdot 1 & 2 + (-1) \cdot 1 & 13 + (-1) \cdot 8 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow x_2 = y = 5, \quad \rightarrow x_1 = x = 8 - 1 \cdot 5 = 3$$

Grafisch:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x + 2y &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 8 - x \\ y &= \frac{13}{2} - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$



Schnittpunkt bei $\{3, 5\}$

Probe!

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 &= \quad 3 + 5 = \quad 8 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 &= \quad 3 + 10 = \quad 13 \end{aligned}$$

Gegeben; *Rechte Seite* $b \in \mathbb{R}^m$, und die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

mit
m Zeilen ($\widehat{=}$ Anzahl der Gleichungen, Bedingungen) und
n Spalten ($\widehat{=}$ Anzahl der Unbekannten).
Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = b$$

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$$||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
$$|||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
$$|||A|||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$||Ax|| \leq |||A||| \cdot ||x||$$

- Matrixmultiplikation: $i = 1, .., m,\ j = 1, .., p$
  $[c_{ij}] = [\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\ ]$
- Inverse: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
- 2×2: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc^{2)}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- Diagonalmatrix; Tridiagonal- und Bandmatrix; Dreiecksmatrix, transponierte Matrix. Einheitsmatrix (I), Permutationsmatrix (P), symmetrische Matrix ($A^T = A$)

[2)] = Determinate von A

$$A x = b, \qquad A\tilde{x} = \tilde{b}$$
$$\triangle x = \tilde{x} - x, \qquad \triangle b = \tilde{b} - b$$

$$\frac{||\triangle x||}{||x||} = |||A||| \cdot |||A^{-1}||| \cdot \frac{||\triangle b||}{||b||}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$$ [3] $b = (4.1, 9.7)^T$, $\tilde{b} = (4.11, 9.7)^T$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$ [4] $$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 0.98 \end{bmatrix}$$

$b = (32, 23, 33, 31)^T$

$sqrteps = 1.5e - 8$[5]

[3] S. Moler, blog

[4] R. Tichatschke, private communication

[5] Python Optimzation: $1.4901161193847656e - 8$

$Ax = b$

$$PA = LU$$

$PAx = Pb \to LUx = Pb \leftrightarrow L(Ux) = \tilde{b}$
$Ly = \tilde{b} \to y, Ux = y \to x$
$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3), n \to \infty$

- Spaltenpivot
- Totalpivot
- Äquilibrieren: DA
- LDL^T
- Householder

Taylor:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x_0) + \ldots +$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \mathcal{O}(h^2), h \to 0$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diskretisierung: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und

$f'(x_0 - h) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$, damit

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)]$$

$$-u''(x) = g(x), x \in (0,1), u(0) = u_0, u(1) = u_1, h = \frac{1}{n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

- $A = E + D + F$
- Lineare Konvergenz
  - a priori
  - a posteriori
- Parallelität

- $A^T A x = A^T b$
- Hilbertmatrix
- QR

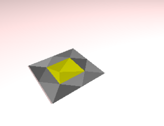
- Polynome
- Lagrange et.al.
- Splines
- Bezier

- Partielle Ableitung
- Newton
  - 2D
  - Vereinfachter Newton
- Quasi-Newton

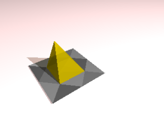
- $Av = \lambda v$
- Iteration
- Spektralverschiebung

- Euler
- Runge-Kutta
- Lotka-Volterra

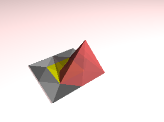
- Differenzenmethode
  - $-u'' = g$
  - $-\Delta u = g$
  - Numerierung
  - Mehrgitter
- Finite Elemente



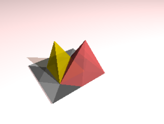
: Triangulierung



: Basisfunktion (1,2)

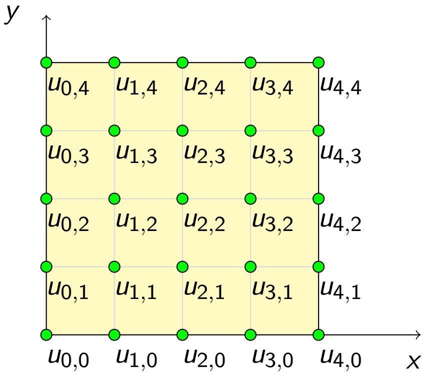


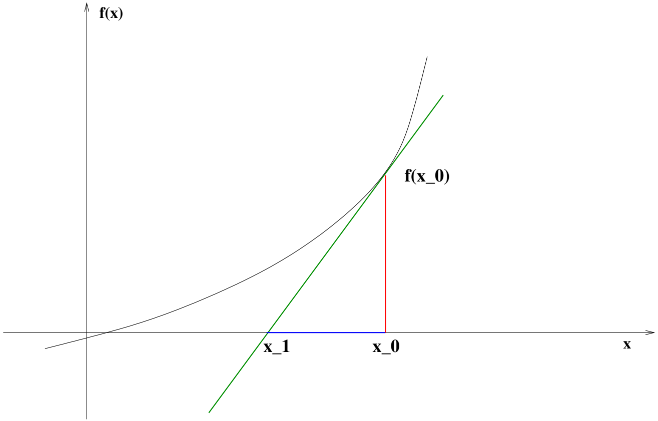
: Basisfunktion (3,1)

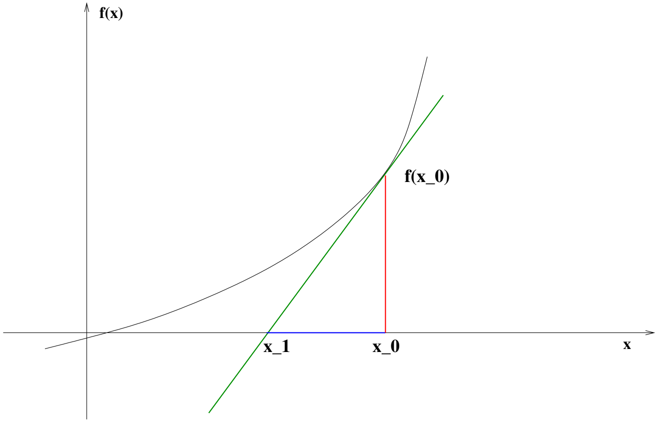


: Beide

Diskretiserung des Quadrats $[0,1]^2$ mit jeweils fünf Punkten in x- bzw. y-Richtung ergibt ein Gitter mit 5×5 Punkten.
Die diskreten Werte der unbekannten Funktion u, werden entsprechend den Gitterpunkten x_i, y_j mit u_{ij} bezeichnet.




f(x)
f(x_0)
x_1
x_0
x



$\frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1} = f'(x_0)$ $\qquad$ $f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_1)$

$f'(x_0)^{-1} f(x_0) = x_0 - x_1$ $\qquad$ $x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0)$ zurück