Diskretisiert man die Aufgabe

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2)\ , \qquad (x_1, x_2) \in (0,1)^2 \\
u(x_1, x_2) &= 0\ , \qquad\qquad (x_1, x_2) \in \partial((0,1)^2)
\end{aligned}$$

mit dem Stern

$$-\Delta u \approx \frac{1}{h^2} \left[\begin{array}{ccc} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{array} \right] u$$

so entsteht mit $h = 1/N$ für $N = 2^p, p = 2, 3, \ldots$ und *zeilenweiser* Numerierung der Unbekannten $x_{ij} \approx u(x(i * h_x, j * h_y)),\ i, j = 1, ..., N-1$ erhält man ein lineares Gleichungssystem $\boxed{Ax = b}$ mit dünnbesetzter, symmetrisch, positiv definiter Matrix.

N	dim	nz	%	voll
4	9	33	40.7	81
8	49	217	9	2401
16	225	1065	2.1	50625
32	961	4681	0.1	913911
64	3969	19593	6.3-10	15752961

Tabelle 1: Dimension und Speicherbedarf

Die Struktur (bei dieser Numerierung) und die Dünnbesetztheit sieht man an folgenden Bildern der Matrizen für $n = 4, 8, 16$ mit Dimensionen $9 \times 9, 49 \times 49, 225 \times 225$.

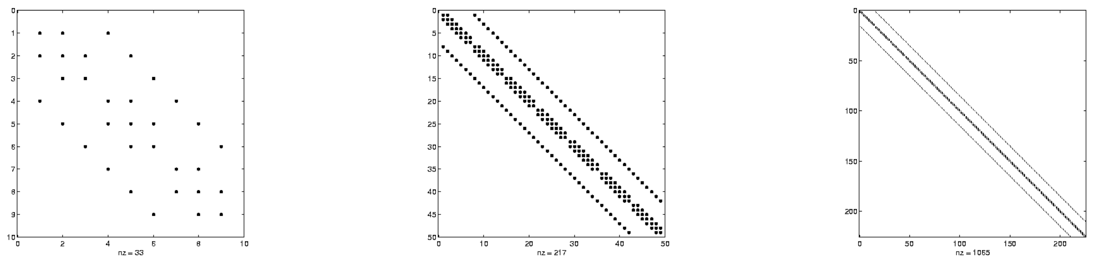

Tabelle 2: Dünnbesetztheit der Matrizen

Die Form kann durch verschiedene Umordnungs-Algorithmen (oder Numerierungen) verändert werden.

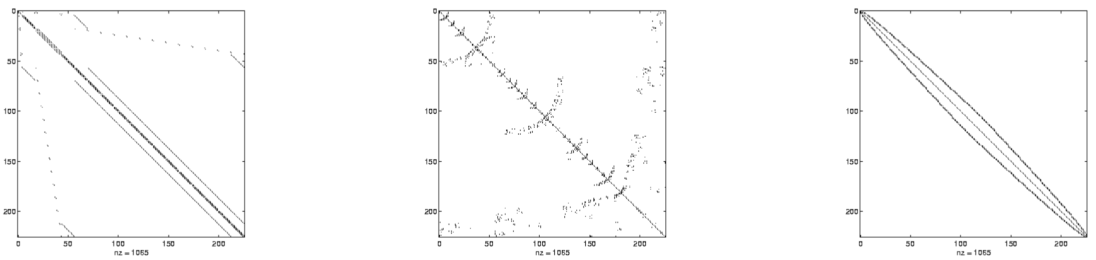

Tabelle 3: Umnumerierung