

Contents

1	Einführung	1
2	Kleines Beispiel	2
2.1	Skizze	2
2.2	Gleichungssystem	2
2.3	Zahlenbeispiel	3
2.4	Die Matrix	4
2.4.1	Kondition	4
2.4.2	Spektrum	4
2.5	Zweites Beispiel	5
3	Großes Beispiel	6
3.1	Dünnbesetztheit	9
4	Anhang	10
4.1	Foto	10
4.2	Skizze	11
4.3	Daten	11

1 Einführung

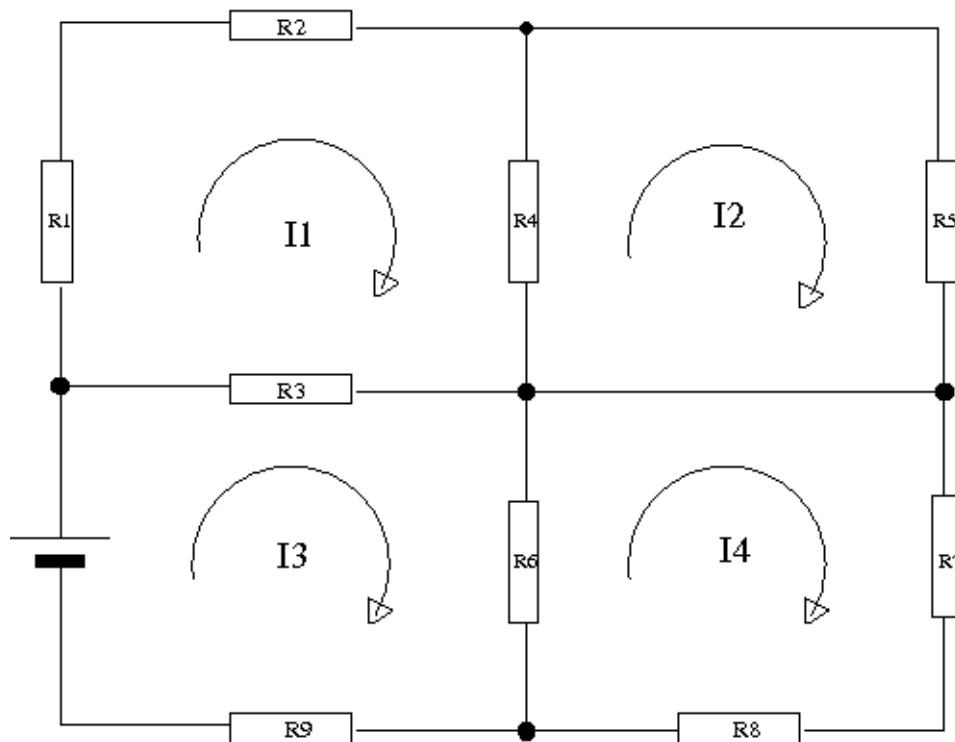
Das Ohmsche Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen Spannung, Stromstärke und Widerstand her. Es gilt

$$R = \frac{U}{I}.$$

Dabei stehen U für die Spannung (in *Volt*, V), I für die Stromstärke (in *Ampere*, A) und R für den Widerstand (in *Ohm*, Ω).

2 Kleines Beispiel

2.1 Skizze



In diesem Schaltbild mit insgesamt neun Widerständen soll der Gesamtwiderstand des Netzwerks ermittelt werden. Dazu werden die vier geschlossenen Kreisläufe betrachtet: Im linken oberen Feld gilt etwa, dass sich nach dem Ohmschen Gesetz die Spannung als

$$R_1 * I_1 + R_2 * I_1 + R_4 * I_1 + R_3 * I_1 - R_4 * I_2 - R_3 * I_3 = 0$$

ergibt. Entsprechend lauten die Gleichungen für die anderen Zellen

$$R_4 * I_2 + R_5 * I_2 - R_4 * I_1 = 0$$

mit der angelegten Spannung U

$$R_3 * I_3 + R_6 * I_3 + R_9 * I_3 - R_3 * I_1 - R_6 * I_4 = U$$

und im vierten Feld

$$R_6 * I_4 + R_7 * I_4 + R_8 * I_4 - R_6 * I_3 = 0$$

2.2 Gleichungssystem

Damit hat man vier lineare Gleichungen für die vier unbekannten Stromflüsse I_1, I_2, I_3 und I_4 . Sortiert man die Gleichungen entsprechend der Nummern der Unbekannten, so

erhalten wir die Matrix

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c} R1 + R2 + R3 + R4 & -R4 & & -R3 & & & 0 \\ & -R4 & R4 + R5 & 0 & & & 0 \\ & -R3 & 0 & R3 + R6 + R9 & & -R6 & \\ & 0 & 0 & -R6 & R6 + R7 + R8 & & \end{array} \right)$$

Mit der rechten Seite $b = (0, 0, 1, 0)^T$ kann nun das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $x = (I1, I2, I3, I4)^T$, gelöst werden.

2.3 Zahlenbeispiel

Mit den Widerstandswerten

$R1 = 100; R2 = 100; R3 = 100; R4 = 100; R5 = 100; R6 = 100; R7 = 100; R8 = 100; R9 = 100$; erhalten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 400 & -100 & -100 & 0 \\ -100 & 200 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 300 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 300 \end{pmatrix}$$

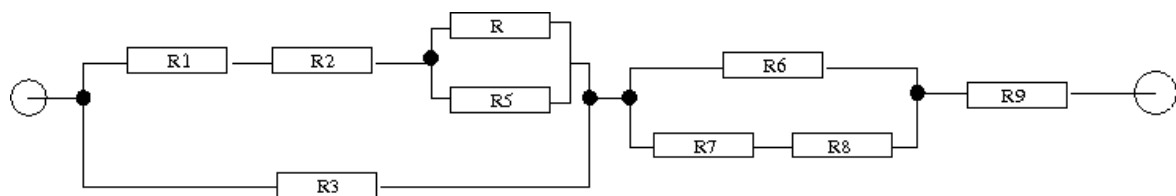
Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt

$$x = \begin{pmatrix} 0.0012 \\ 0.0006 \\ 0.0042 \\ 0.0014 \end{pmatrix}.$$

Daraus errechnet sich der Gesamtwiderstand des Widerstandsnetzwerks aus der dritten Zeile

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I3} = \frac{1V}{0.0042A} = 238.09524\Omega$$

Alternativ kann der Gesamtwiderstand (mit Parallel- und Hintereinanderschaltung) auch folgendermaßen ermittelt werden: Dazu wird das Netzwerk als *umgezeichnet*, damit die Hintereinander- und Parallelschaltungen deutlich werden.



Mit den Formeln

Hintereinanderschaltung $R = R1 + R2$

Parallelschaltung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} (= \frac{R2+R1}{R1*R2})$, also $R = \frac{R2*R1}{R1+R2}$

erhält man dann

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\frac{1}{R1+R2} + \frac{1}{\frac{1}{R4} + \frac{1}{R5}}} + \frac{1}{R3} \right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{R6} + \frac{1}{R7+R8}} \right) + R9 \\
 &= \left(\frac{1}{\frac{1}{100+100} + \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}}} + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100+100}} \right) + 100 \\
 &= \left(\frac{1}{\frac{1}{100+100+50} + \frac{1}{100}} \right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200}} \right) + 100 \\
 &= \left(\frac{1}{\frac{1}{250} + \frac{1}{100}} \right) + \left(\frac{1}{\frac{300}{20000}} \right) + 100 = 25000/350 + 20000/300 + 100 \\
 &= 238.09524
 \end{aligned}$$

2.4 Die Matrix

2.4.1 Kondition

Die Kondition der Matrix ist $\text{cond}(A) = 3.618034$

2.4.2 Spektrum

Die Eigenwerte/Eigenvektoren errechnen sich als $[\text{evals}, X] = \text{spec}(A)$

mit $X = \begin{pmatrix} 138.1966 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 361.8034 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{pmatrix}$ und

$$\text{evals} = \begin{pmatrix} -0.4472136 & 0 & -0.4472136 & 0.7745967 \\ -0.7236068 & -0.5773503 & 0.2763932 & -0.2581989 \\ -0.4472136 & 0.5773503 & -0.4472136 & -0.5163978 \\ -0.2763932 & 0.5773503 & 0.7236068 & 0.2581989 \end{pmatrix}$$

2.5 Zweites Beispiel

Mit $R1 = 1; R2 = 2; R3 = 3; R4 = 4; R5 = 5; R6 = 6; R7 = 7; R8 = 8; R9 = 9$; ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 18 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 21 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten/Eigenvektoren

$$X = \begin{pmatrix} 5.0771778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.796161 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15.207412 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.919249 \end{pmatrix}$$

und

$$evals = \begin{pmatrix} -0.6851647 & -0.4269136 & 0.5765659 & 0.1259596 \\ -0.6986447 & 0.6107138 & -0.3715339 & -0.0297790 \\ -0.1927884 & -0.5586832 & -0.5054270 & -0.6286885 \\ -0.0726461 & -0.3642067 & -0.5235245 & 0.7668104 \end{pmatrix}.$$

Die Kondition ist nun $cond(A) = 5.1050504$

Die Lösung ergibt sich als $x = A \backslash b = \begin{pmatrix} 0.0240183 \\ 0.0106748 \\ 0.0658279 \\ 0.0188080 \end{pmatrix}.$

Daraus erhält man den Gesamtwiderstand

$$1/0.0658279 = 15.191127\Omega$$

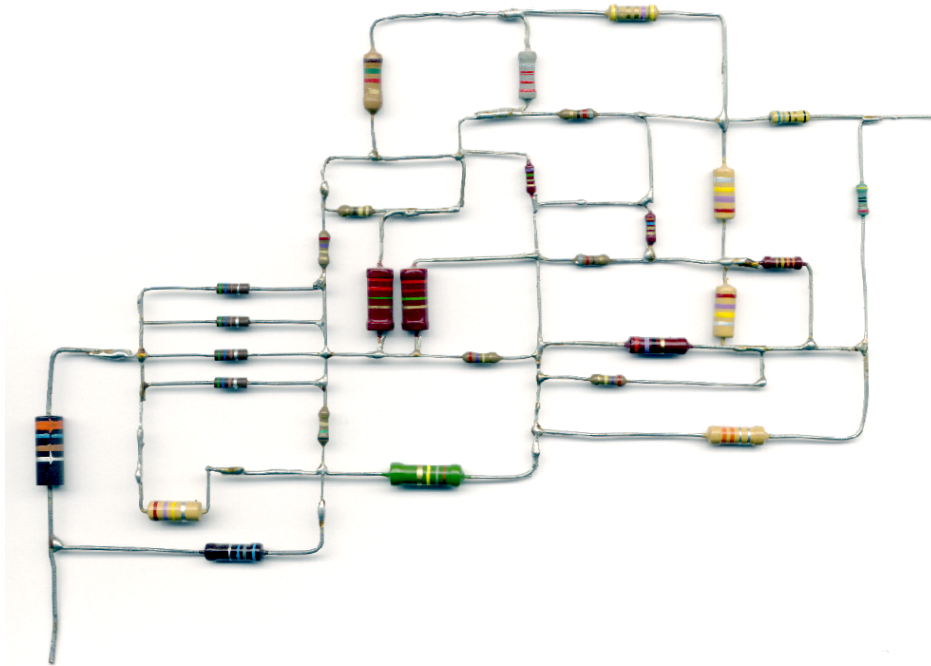
oder mit Formel(2.3)

$$\begin{aligned} & 1/(1/(R1 + R2 + 1/(1/R4 + 1/R5)) + 1/R3) + 1./(1./R6 + 1/(R7 + R8)) + R9 \\ & = 15.19112\Omega \end{aligned}$$

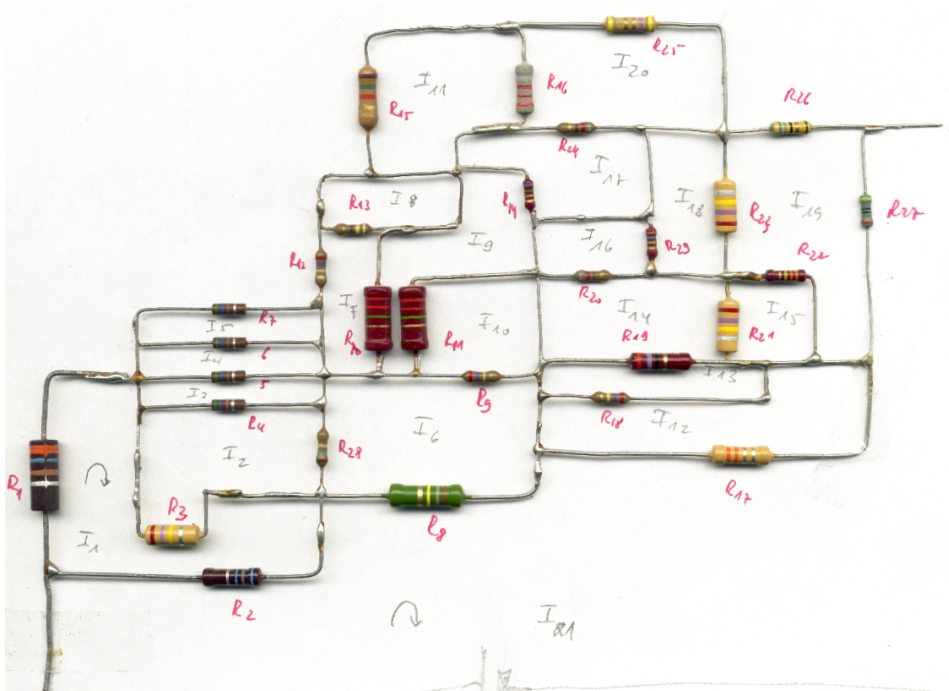
.

3 Großes Beispiel

Das Widerstandsnetzwerk



soll nun untersucht werden. Dazu erhalten die Widerstände eine Bezeichnung ($R_1 - R_{29}$) und



wie im ersten Beispiel werden für alle 21 Zellen die Gleichungen abgelesen und in einer Matrix zusammengefasst:

$R1 + R3 + R2$	$-R3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R2$
$-R3$	$R3 + R4 + R28$	$-R4$	0	0	$-R28$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-R4$	$R4 + R5$	$-R5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$-R5$	$R5 + R6$	$-R6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-R6$	$R6 + R7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-R28$	0	0	0	$R8 + R28 + R9$	0	0	0	$-R9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R8$
0	0	0	0	0	0	$R10 + R12 + R13$	$-R13$	$-R10$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-R13$	$R13$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-R10$	0	$R11 + R10 + R14$	$-R11$	0	0	0	0	0	0	$-R14$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-R9$	0	0	$R9 + R11$	$-R11$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$R15 + R16$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R16$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$R17 + R18$	$-R18$	0	0	0	0	0	0	0	$-R17$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R18$	$R18 + R19$	$-R19$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R19$	$R19 + R20 + R21$	$-R21$	$-R20$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R21$	$R21 + R22$	0	0	0	$-R22$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R20$	0	$R20 + R29$	0	$-R29$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R14$	0	0	0	0	0	0	$R14 + R24$	0	0	$-R24$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R29$	0	$R29 + R23$	$-R23$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R22$	0	0	$-R23$	$R22 + R23 + R26 + R27$	0	$-R27$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-R16$	0	0	0	0	0	$-R24$	0	0	$R24 + R16 + R25$	0
$-R2$	0	0	0	0	$-R8$	0	0	0	0	0	$-R17$	0	0	0	0	0	0	$-R27$	0	$R2 + R8 + R17 + R27$

Mit den Widerstandswerten von Seite4.3 ergibt sich die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 68270360 & -270000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -68000000 \\ -270000 & 420560 & -560 & 0 & 0 & -150000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -560 & 1120 & -560 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -560 & 1120 & -560 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -560 & 1120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150000 & 0 & 0 & 0 & 600000 & 0 & 0 & -270000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -180000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & $4.425E+08$ & $-4.400E+08$ & -2200000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & $-4.400E+08$ & $4.400E+08$ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2200000 & 0 & 4400007.5 & -2200000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -270000 & 0 & 0 & -2200000 & 2470000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 270000.6 & -270000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -270000 & 270027 & -27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -270847 & -270000 & -820 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -270000 & 600000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 823.6 & -3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 628.5 & 0 & 0 & -621 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 270003.6 & -270000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -330000 & 0 & 0 & 600467 & 0 & -400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -621 & 0 & 2825.7 & 0 \\ -68000000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -180000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -400 & 68180401 \end{pmatrix}$$

Die Kondition dieser Matrix ist $\text{cond}(A) = 68082188$,

das Spektrum ist:

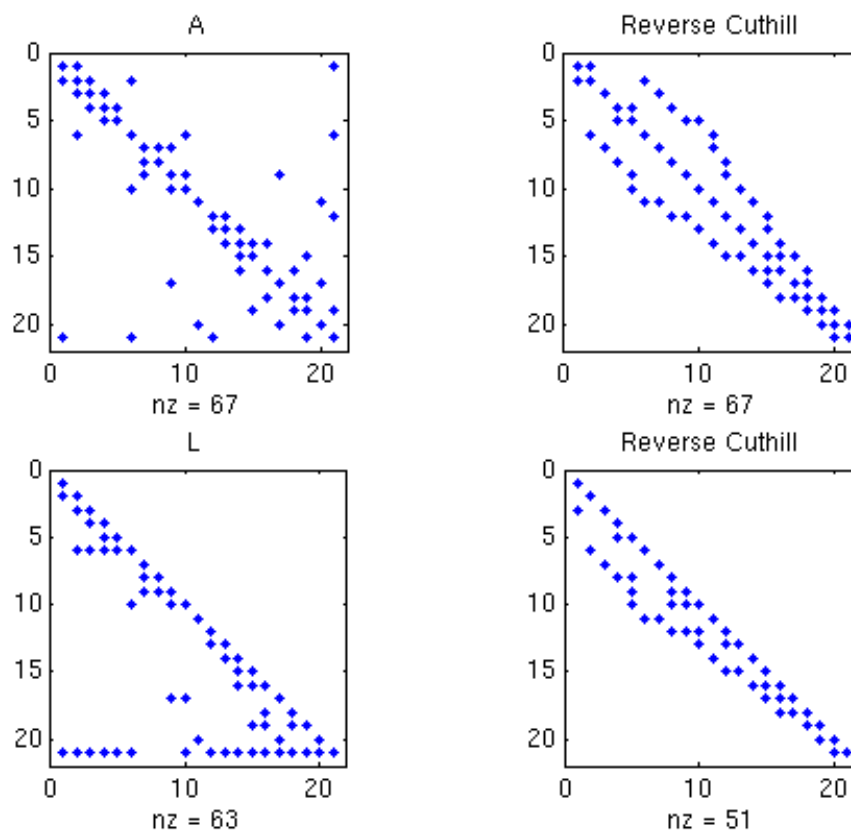
$\{12.94376, 96.655449, 285.15823, 327.08267, 1054.2839, 1118.0258, 1331.2265, 1910.9386, 5537.815, 20912.08, 8.812E+08\}$

Die Besetzungsstruktur der Matrix A zeigt der *matlab*-Befehl $\text{spy}(A)$

Die Messung mit dem Ohmmeter ergibt einen Widerstand von $84\,800^1\,\Omega$.

3.1 Dünnbesetztheit

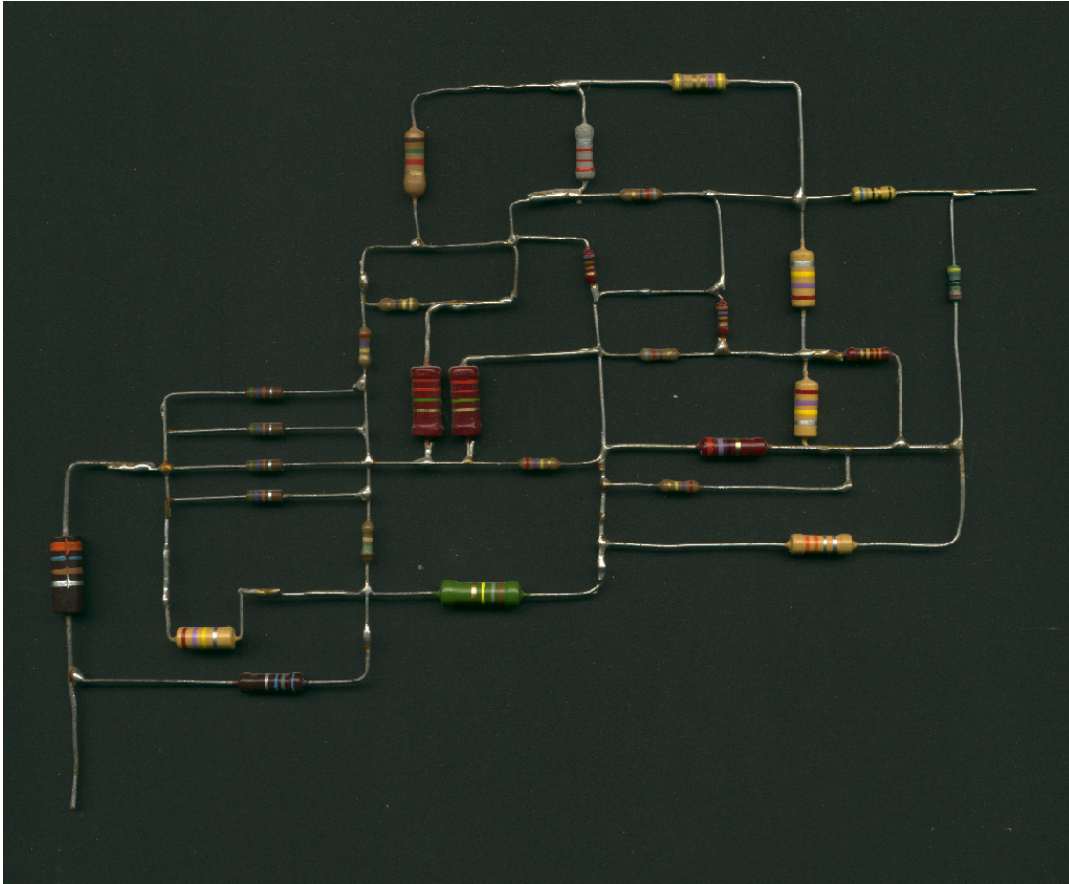
Sparse, Reverse-Cuthill-McGee



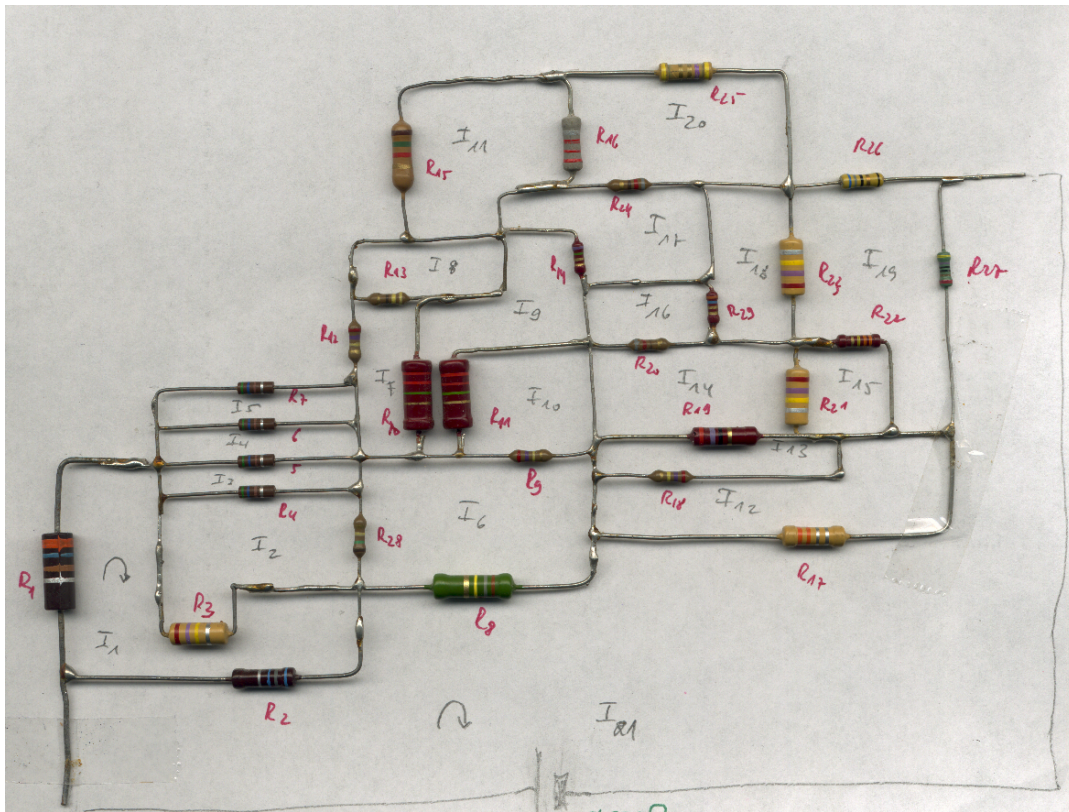
¹Nach dem Zusammenlöten war ich sehr überrascht, diesen Wert von $84k\Omega$ zu messen – es war im Jahre 1984 ...

4 Anhang

4.1 Foto



4.2 Skizze



4.3 Daten

r1= 360 // orange blau braun .
r2= 68000000 // blau grau blau
r3= 270000 // rot violett gelb .
r4= 560 // grün blau braun
r5= 560
r6= 560
r7= 560
r8= 180000 // braun grau gelb .
r9= 270000 // rot violett gelb .
r10= 2200000 // rot rot grün .
r11= 2200000 // .
r12= 270000 // rot violett gelb .
r13= 440000000 // gelb gelb violett
r14= 7.5 // sollte sein: 7.5 // violett grün gold .
r15= 1500 // braun grün rot
r16= 2200 //rot rot rot .
r17= 0.6 // sollte sein: 0.33 // orange orange silber .

r18= 270000 //rot violett gelb .
r19= 27 //rot violett schwarz
r20= 820 //grau rot braun .
r21= 270000 //rot violett gelb
r22= 330000 //orange orange gelb .
r23= 270000 //rot violett gelb
r24= 621 //blau rot braun
r25= 4.7 // gelb violett gold gold .
r26= 67 //blau lila schwarz
r27= 400 // gelb schwarz schwarz .
r28= 150000 //braun grün gelb .
r29= 3.6 //orange blau gold