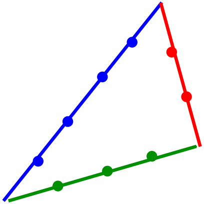
Über Pythagoras und das Wurzelziehen

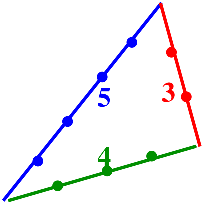
Manfred Ries

20.06.2012

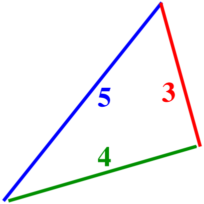
Knotenseil

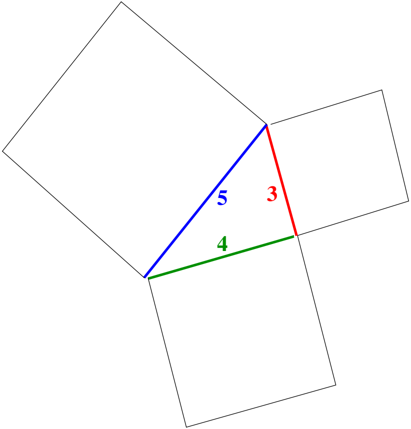


Knotenseil

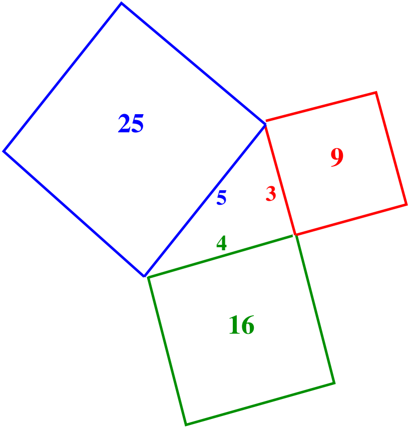


Knotenseil

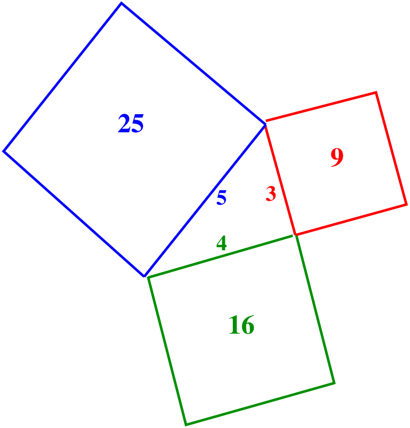



5
3
4

Pythagoras

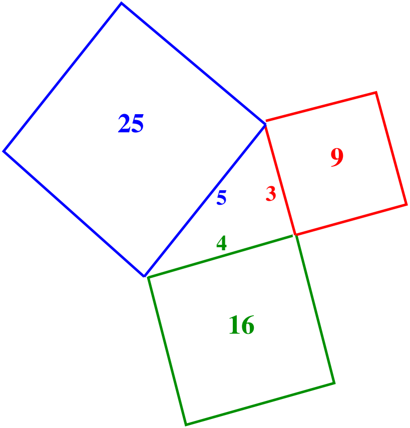


Pythagoras



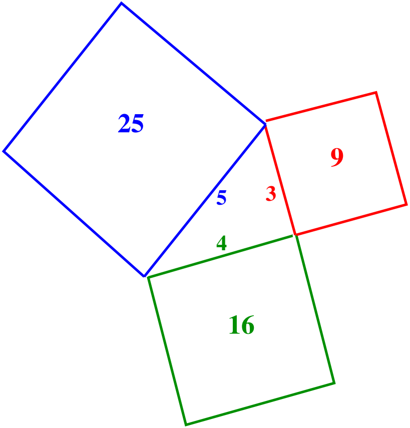
$$9 + 16 = 25$$

Pythagoras



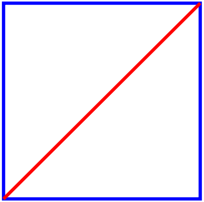
$$9 + 16 = 25 \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

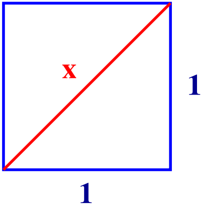
Pythagoras

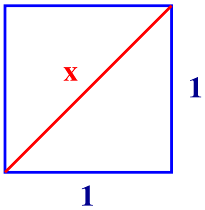


$$9 + 16 = 25 \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

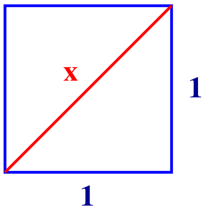
$$3 = \sqrt{9} \qquad 4 = \sqrt{16} \qquad 5 = \sqrt{25}$$




x
1
1

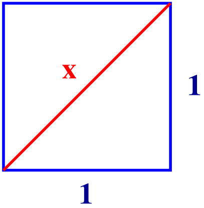


$$1^2 + 1^2 = x^2$$



$$1^2 + 1^2 = x^2$$

$$2 = x^2$$



$$1^2 + 1^2 = x^2$$

$$2 = x^2$$

$$\sqrt{2} = x$$

$\sqrt{}$

$\sqrt{}$

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{111}$

$$\sqrt{}$$

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{10} \quad \sqrt{111}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

$\sqrt{}$

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{111}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ Wurzel

$$\sqrt{}$$

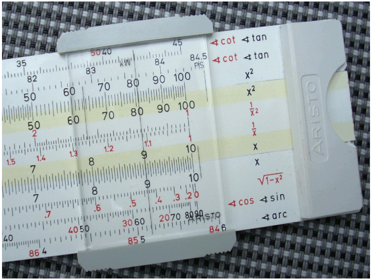
$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{111}$

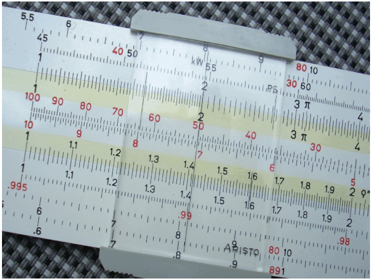
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ Wurzel, radix, r

$$\sqrt{}$$

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{111}$

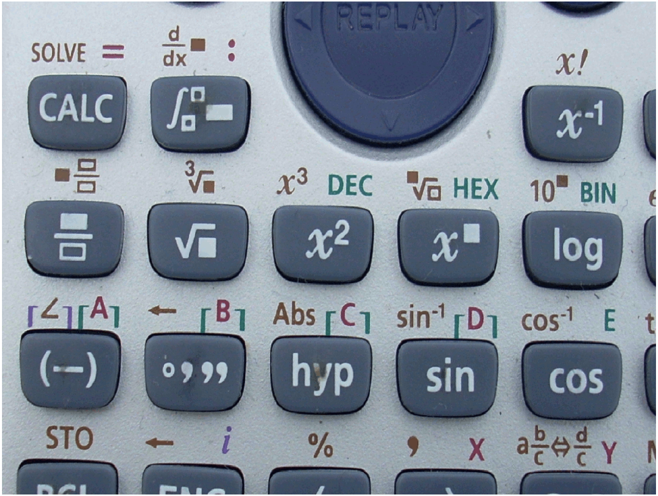
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ Wurzel, radix, r



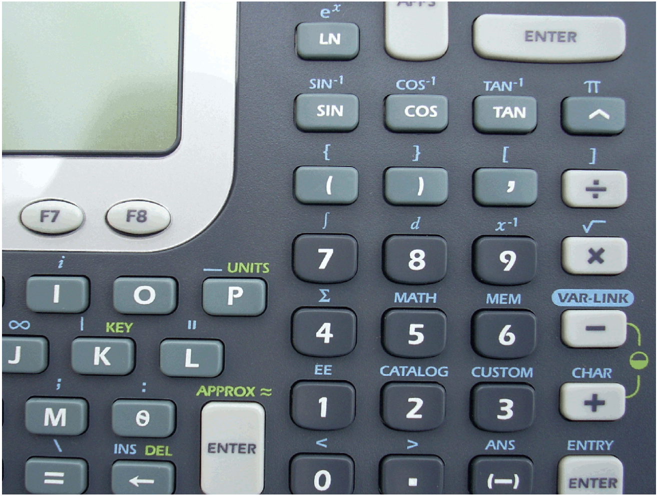



CASIO
fx-991ES
NATURAL DISPLAY
TWO WAY POWER
HEWLETT PACKARD
42S
RPN


+/–
MRC
M+
M–
%
√
7
8
9
÷
OFF
4
5
6
×


REPLAY
SOLVE =
CALC
x!
x^{-1}
DEC
HEX
BIN
x^3
x^2
log
Abs
$\sin^{-1}$
$\cos^{-1}$
A
B
C
D
E
hyp
sin
cos
STO
%
X
Y


Σ−
y^x
x^2
10^x
e^x
Σ+
1/x
√x
LOG
LN
COMPLEX
%
π
ASIN
ACOS
STO
RCL
R↓
SIN
COS
ALPHA
LAST x
MODES
DISP
ENTER
x≷y
+/−
E
BST
SOLVER
∫ f(x)
MATRIX
7
8
9
÷


LN
ENTER
SIN-1
COS-1
TAN-1
SIN
COS
TAN
F7
F8
UNITS
I
O
P
7
8
9
Σ
MATH
MEM
VAR-LINK
KEY
J
K
L
4
5
6
EE
CATALOG
CUSTOM
CHAR
APPROX ≈
M
ENTER
1
2
3
INS
DEL
ANS
ENTRY
0
(−)
ENTER


Rechner
0
Deg
( ) % MC M+ M− MR
1/x x² x³ yˣ C ± ÷ ×
x! √ Rad log₂ 7 8 9 −
sin cos tan log₁₀ 4 5 6 +
sinh cosh tanh ln 1 2 3
π e Rand EE 0 , =

gegeben: $a \in \boldsymbol{R}^{+}$

[1] ▸ Newton-Methode zu $f(x) = x^2 - a$

gegeben: $a \in \boldsymbol{R}^+$

gesucht: $x \in \boldsymbol{R}^+$ mit $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$

[1] ▸ Newton-Methode zu $f(x) = x^2 - a$

gegeben: $a \in \boldsymbol{R}^+$

gesucht: $x \in \boldsymbol{R}^+$ mit $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$

Start: $x_0 \in \boldsymbol{R}^+$

[1] Newton-Methode zu $f(x) = x^2 - a$

gegeben: $a \in \boldsymbol{R}^+$

gesucht: $x \in \boldsymbol{R}^+$ mit $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$

Start: $x_0 \in \boldsymbol{R}^+$

Iteration[1]: $x_{n+1} = x_n - (2x_n)^{-1}({x_n}^2 - a)$

[1] Newton-Methode zu $f(x) = x^2 - a$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - (2x_n)^{-1}({x_n}^2 - a) \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{{x_n}^2 - a}{2x_n} \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(2x_n - \frac{{x_n}^2 - a}{x_n}) \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{2{x_n}^2 - {x_n}^2 + a}{x_n}) \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{{x_n}^2 + a}{x_n}) \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - (2x_n)^{-1}({x_n}^2 - a) \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{{x_n}^2 - a}{2x_n} \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(2x_n - \frac{{x_n}^2 - a}{x_n}) \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{2{x_n}^2 - {x_n}^2 + a}{x_n}) \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{{x_n}^2 + a}{x_n}) \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad \text{Formel von Heron}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = x^\star$$

mit

$$x^\star = \sqrt{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = x^\star$$

mit

$$x^\star = \sqrt{a}$$

a) Fixpunkt: $x^\star = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{a}{x^\star}) = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{x^\star x^\star}{x^\star}) = x^\star$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = x^\star$$

mit

$$x^\star = \sqrt{a}$$

a) Fixpunkt: $x^\star = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{a}{x^\star}) = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{x^\star x^\star}{x^\star}) = x^\star$

b) Beschränkt (nach unten): $(x_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$
$x_n{}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a \geq 0$ $\quad \frac{x_n{}^2+a}{2x_n} \geq \sqrt{a}$ $\quad x_{n+1} \geq \sqrt{a}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = x^\star$$

mit

$$x^\star = \sqrt{a}$$

a) Fixpunkt: $x^\star = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{a}{x^\star}) = \frac{1}{2}(x^\star + \frac{x^\star x^\star}{x^\star}) = x^\star$

b) Beschränkt (nach unten): $(x_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$
$x_n{}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a \geq 0 \qquad \frac{x_n{}^2+a}{2x_n} \geq \sqrt{a} \qquad x_{n+1} \geq \sqrt{a}$

c) Monoton fallend: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \leq \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{\sqrt{a}})$
$= \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{a}) \leq \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$

Wie schnell?

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2}(x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n}) \\ &= \frac{1}{2x_n}({x_n}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \end{aligned}$$

also

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2$$

Wie schnell?

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2}(x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n}) \\ &= \frac{1}{2x_n}({x_n}^2 - 2x_n\sqrt{a} + a) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \end{aligned}$$

also

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2$$

Quadratische Konvergenz

Zu a gehört im Rechner eine ▸ binäre Darstellung b

a) b hat eine gerade Anzahl von Ziffern (s) vor dem Komma: z.B. $b = 1010.11$.
Nach Verschiebung des Kommas um $s = 4$ Stellen nach links gilt $b = 0.101011 \cdot 2^4$ also, $b = \tilde{b} \cdot 2^s$. Die Wurzel aus b ist dann gleich $\sqrt{\tilde{b}} \cdot 2^{\frac{s}{2}}$ und es gilt $\frac{1}{2} \leq \tilde{b} \leq 1$.

Zu a gehört im Rechner eine ▸ binäre Darstellung b

a) b hat eine gerade Anzahl von Ziffern (s) vor dem Komma: z.B. $b = 1010.11$.
Nach Verschiebung des Kommas um $s = 4$ Stellen nach links gilt $b = 0.101011 \cdot 2^4$ also, $b = \tilde{b} \cdot 2^s$. Die Wurzel aus b ist dann gleich $\sqrt{\tilde{b}} \cdot 2^{\frac{s}{2}}$ und es gilt $\frac{1}{2} \leq \tilde{b} \leq 1$.

b) b hat eine ungerade Anzahl von Ziffern vor dem Komma: Dann verschieben wir das Komma um $s - 1$ Stellen. Z.B. sei $b = 10101.11$. Die Verschiebung des Kommas um diese $s - 1 = 5 - 1 = 4$ ergibt $b = 1.010111 \cdot 2^4$, also $b = \tilde{b} \cdot 2^{(s-1)}$.
$s - 1$ ist nun gerade und es gilt $\sqrt{b} = \sqrt{\tilde{b}} \cdot 2^{\frac{s-1}{2}}$ mit $1 \leq \tilde{b} \leq 2$.

Das heißt: Wir müssen den Algorithmus nur für Argumente im Intervall

$$\tilde{b} \in [\tfrac{1}{2}, 2]$$

benutzen! [2]
Und in diesem Intervall gilt bei cleverem Start mit $x_0 = \frac{2a}{1+a}$

$$|x_0 - \sqrt{a}| < \frac{1}{10}$$

Also haben wir Konvergenz bis auf *Maschinengenauigkeit* in maximal ($10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}$) 4 Schritten.

[2] Und Multiplikationen mit 2 sind nur Stellenverschiebungen!!

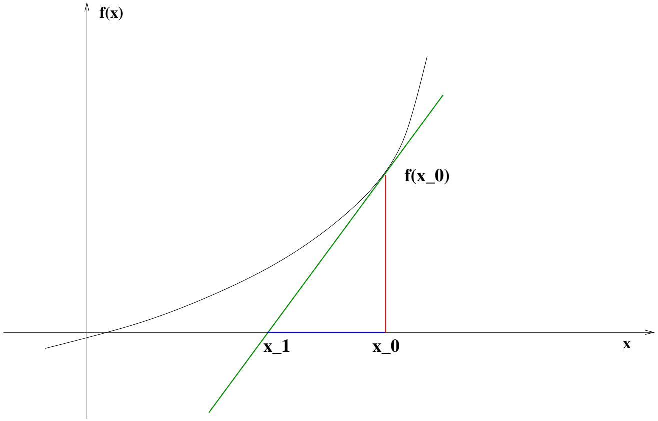
```
manfred@lupus:~/wurzel> cat wu.py
#!/usr/bin/python
# name wu.py
a = input('Wurzel aus : ')
x = a
for i in range(1,5):  # 1<= i < 5; 1234
  x = 1.0/2.0 * ( x + a/x )
  fehler = x*x-a
  print "i = %i " % i, " x = %18.16f" % x
```

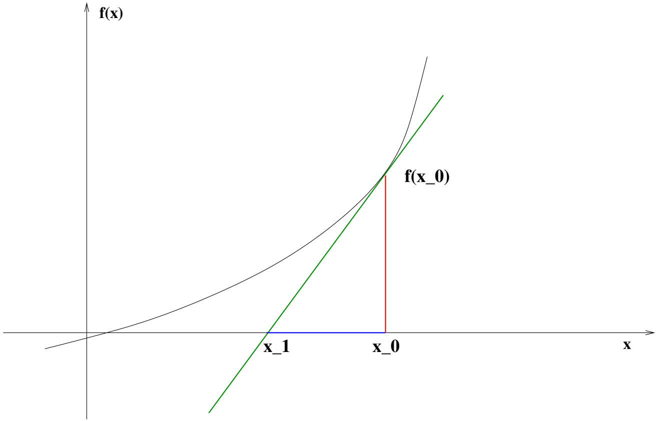
```
manfred@lupus: /wurzel> python wu.py
Wurzel aus : 1.5
 i = 1   x = 1.2500000000000000   Fehler = 0.0625000000000000
 i = 2   x = 1.2250000000000001   Fehler = 0.0006250000000003
 i = 3   x = 1.2247448979591837   Fehler = 0.0000000650770513
 i = 4   x = 1.2247448713915894   Fehler = 0.0000000000000009
```

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

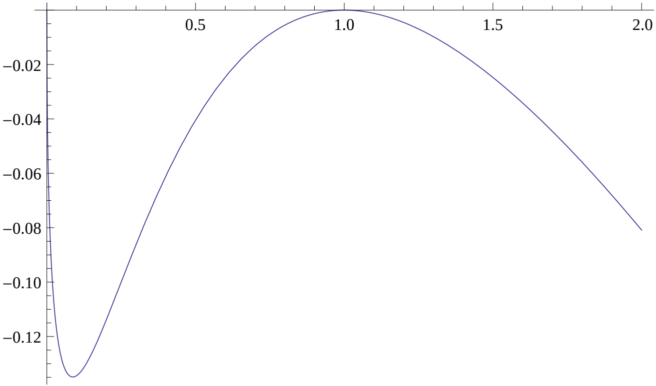
und Herzlichen Glückwunsch !!!


f(x)
f(x_0)
x_1
x_0
x



$\frac{f(x_0)-0}{x_0-x_1} = f'(x_0)$ $\quad$ $f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_1)$

$f'(x_0)^{-1} f(x_0) = x_0 - x_1$ $\quad$ $x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0)$ ▸ zurück



2x/(1+x)-Sqrt[x]

▸ zurück

Dezimale Darstellung

$$57023.28 = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$$

$$57023.28 = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100}$$

Binäre Darstellung

$$11010.01 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

$$11010.01 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}$$

Dezimale Darstellung

$$
\begin{aligned}
57023.28 &= 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} \\
57023.28 &= 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100}
\end{aligned}
$$

Binäre Darstellung

$$
\begin{aligned}
11010.01 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\
11010.01 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&= 16 + 8 + 2 + \frac{1}{4} = 26.25_{10}
\end{aligned}
$$

zurück